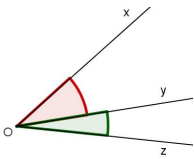


Angles : Définitions utiles

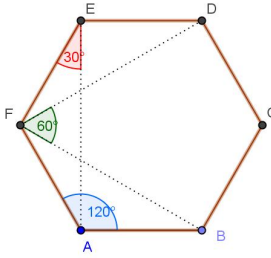
D1: Deux angles qui ont un **sommet commun** et un **côté commun** sont dits **adjacents**.



Sur la figure ci contre, l'angle en rouge et l'angle en vert ont en commun le côté [O y) et le sommet O : Ils sont donc adjacents

D2 : Deux angles sont **complémentaires** si la somme de leur **mesure** vaut 90° .

D3 : Deux angles sont **supplémentaires** si la somme de leur **mesure** vaut 180° .



Sur la figure ci contre :

- Les angles \widehat{DFB} (en vert) et \widehat{FEA} (en rouge) sont complémentaires car : $60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$
- Les angles \widehat{FAB} en bleu et \widehat{DFB} en vert sont supplémentaires car : $120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

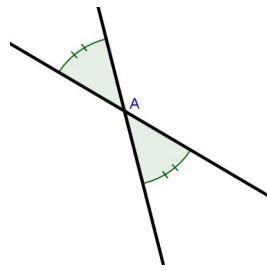
Propriétés : Trois points sont **alignés** si et seulement si ils forment un **angle plat**.

RÉVISION RAPIDE

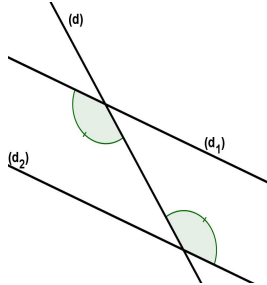
1

Angles : Propriétés utiles

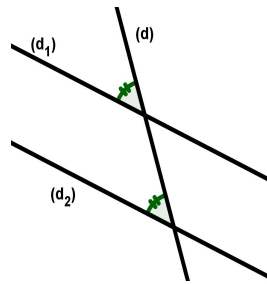
P1: Deux angles **opposés par le sommet** sont de **même mesure**.



P2 : Deux angles **alternes internes** définis par 2 droites **parallèles** sont de **même mesure**.



P3 : Deux angles **correspondant** définis par 2 droites **parallèles** sont de **même mesure**.

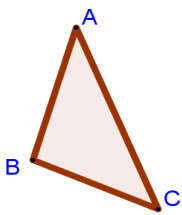


RÉVISION RAPIDE

3

Triangle : Généralités

Définition : Figure géométrique ayant 3 cotés.



Vocabulaire :

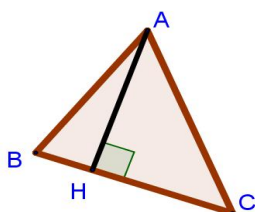
- A, B et C sont les 3 sommets
- [AB],[AC],[BC] sont les 3 cotés

$$\overline{BAC} ; \overline{ABC} \text{ et } \overline{ACB}$$

sont les 3 angles

Propriétés :

- La somme des **mesures des trois angles** d'un triangle est **toujours égale à 180°** .
- La somme des **longueurs de 2 cotés** d'un triangle est **toujours plus grande que la longueur du 3^{ème} coté**
- le **périmètre** d'un triangle ABC vaut $AB + AC + BC$.



• Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). La surface vaut :

$$\frac{1}{2} (AH \times BC)$$

RÉVISION RAPIDE

5

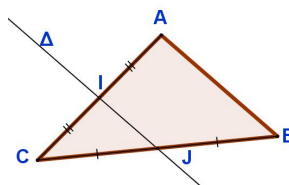
Triangle : Droite des milieux

Définition: Droite qui passe par les **milieux de 2 cotés**

Propriétés :

P1 : Si une droite passe par les milieux de deux cotés d'un triangle alors elle est **parallèle** au troisième coté.

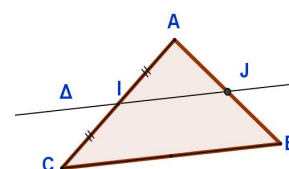
P2 : Si un segment joint les milieux de deux cotés d'un triangle alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième coté.



La droite (Δ) de la figure ci-contre passe par les milieux I et J des cotés [AC] et [BC]. On a :

$$IJ = \frac{AB}{2}$$

P3 : Si dans un triangle une droite passe par le milieu d'un coté et est **parallèle** à un second coté alors elle coupe le 3^{ème} coté en son milieu.



La droite (Δ) passe par le milieu I de [AC] et est parallèle à (BC). Elle coupe [AB] en J. On peut donc conclure que J est le milieu de [AB].

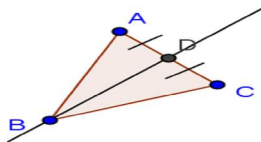
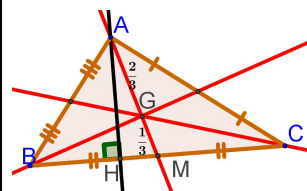
RÉVISION RAPIDE

7

Droites d'un triangle : Les médianes

Définition : Droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé à ce sommet

Propriétés :



P1 : Les 3 médianes d'un triangle se coupent en un point G appelé **centre de gravité du triangle**

P2 : Soit la médiane (AM) ; On a : $AG = \frac{2}{3}AM$ et $GM = \frac{1}{3}AM$

P3 : Si les médianes issues de 2 sommets d'un triangle passent par un point G alors ce point est le centre de gravité de ce triangle.

P4 : une médiane partage un triangle en 2 triangles de même aire

$$A_{ABM} = \frac{AH \times BM}{2}, \quad A_{AMC} = \frac{AH \times MC}{2}$$

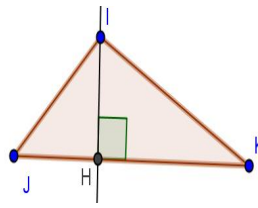
$$\text{donc } A_{ABM} = A_{AMC}$$

RÉVISION RAPIDE

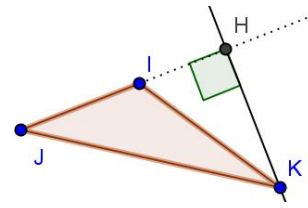
9

Droites d'un triangle : Les hauteurs

Définition : Droite passant par un sommet et perpendiculaire au support du côté opposé à ce sommet.



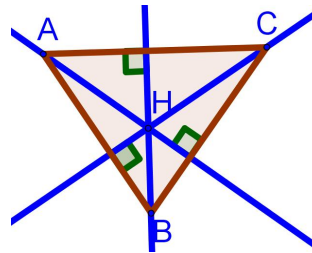
Hauteur à l'intérieur du triangle



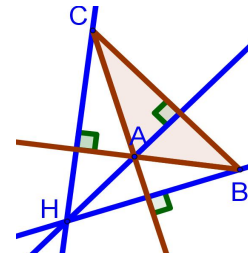
Hauteur à l'extérieur du triangle

Propriété :

P1 : Les 3 hauteurs d'un triangle se coupent en un point H appelé **orthocentre de ce triangle**.



Orthocentre à l'intérieur



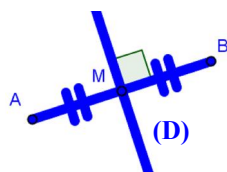
Orthocentre à l'extérieur

RÉVISION RAPIDE

11

Les Médiatrices

Définition : Droite perpendiculaire à un segment en son milieu :



$M \in [AB]$ et $M \in (D)$
 $AM = MB$
 $(D) \perp (AB)$

Propriété :

P1 : Tout point de la médiatrice d'un segment est à égale distance des extrémités de ce segment.

M est un point de la médiatrice du segment [AB] donc $MA = MB$

$O \in (D)$ donc $AO = OB$

P2 : Les médiatrices relatives aux 3 côtés d'un triangle se coupent en un point O. Ce point représente le **centre du cercle circonscrit** à ce triangle : On a : $OA = OB = OC$

Méthode : Construction du cercle circonscrit à un triangle :

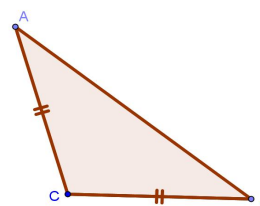
- Tracer les médiatrices de 2 côtés et marquer leur point d'intersection O
- Construire ensuite le cercle de centre O et passant par un des sommets du triangle.

RÉVISION RAPIDE

13

Triangle isocèle

Définition : Un triangle isocèle est un triangle ayant 2 côtés de même longueur.

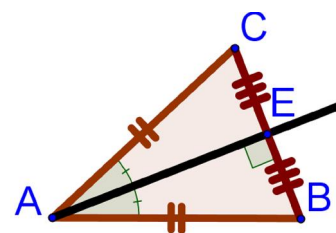


Vocabulaire :

- [AC] et [BC] sont les 2 côtés de même longueur : On dit que le triangle ABC est isocèle en C ou isocèle de sommet principal C
- [AB] est appelé la base du triangle isocèle ABC

Propriétés :

- Dans un triangle isocèle les angles à la base ont la même mesure : $mes \hat{A} = mes \hat{B}$
- Si un triangle a 2 angles égaux alors il est isocèle.
- Dans un triangle isocèle, les médiane, hauteur, bissectrice et médiatrice issues du sommet principal sont confondues

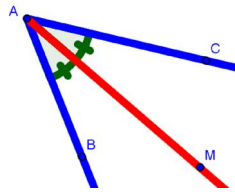


RÉVISION RAPIDE

15

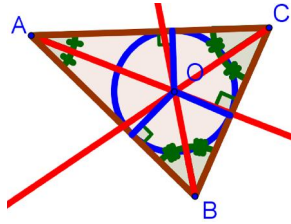
Les bissectrices

Définition : La bissectrice d'un angle est la demie droite qui part de son sommet et qui le partage en 2 angles adjacents égaux.



Propriété :

P1 : Les 3 bissectrices d'un triangle se coupent en un point I qui représente le **centre du cercle inscrit** dans ce triangle.



Méthode : Construction du cercle inscrit dans un triangle :

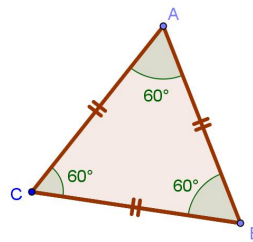
- Tracer les bissectrices de 2 sommets et marquer leur point d'intersection I : I est le centre du cercle inscrit.
- Construire une droite passant par I et perpendiculaire à un côté du triangle. Marquer l'intersection de cette droite avec le côté considéré : soit M.
- Tracer ensuite le cercle de centre I et passant par M.

RÉVISION RAPIDE

17

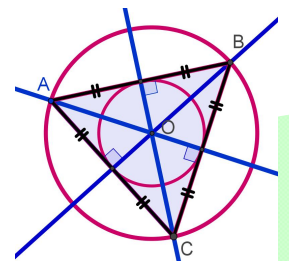
Triangle équilatéral

Définition : Un triangle équilatéral est un triangle ayant 3 cotés de même longueur.



Propriétés :

- Les trois angles d'un triangle équilatéral ont une même mesure égale à 60° .
- Si un triangle est isocèle et possède en plus un angle de 60° alors il est équilatéral.
- Dans un triangle équilatéral, les médianes, hauteurs, bissectrices et médiatrices issues des trois sommets sont confondues : le centre de gravité est donc aussi l'orthocentre et le centre des cercles circonscrits et inscrits.



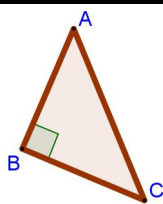
RÉVISION RAPIDE

19

Triangle rectangle

Définition : Triangle ayant 2 cotés de supports perpendiculaires.

Vocabulaire :



- [AB] et [BC] sont les 2 cotés de supports perpendiculaires $\widehat{mes} \overline{ABC} = 90^\circ$

On dit que le triangle ABC est rectangle en B

- Le côté [AC] est appelé l'hypoténuse du triangle rectangle ABC

Propriétés :

- Les angles en A et en C sont complémentaires ;
 - La surface du triangle ABC vaut : $\frac{1}{2} \times AB \times BC$
- Périmètre : $AB+BC+AC$

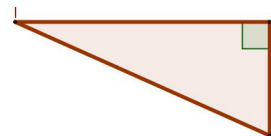
RÉVISION RAPIDE

21

Propriété de Pythagore : Enoncé

Enoncé :

Si IJK est un triangle rectangle en J alors le carré de l'hypoténuse [IK] est égale à la somme des carrés des deux autres cotés [IJ] et [JK] :



Comme le triangle IJK de la figure ci contre est rectangle en J je peux écrire :

$$IK^2 = IJ^2 + JK^2$$

Méthode :

Q1 : A quoi peut servir cette propriété ?

R1 : A calculer la longueur d'un côté du triangle.

Q2 : Que dois-je déjà avoir ?

R2 : Un triangle rectangle et la longueur de deux cotés de ce triangle

Q3 : Que puis-je écrire une fois que je suis convaincu que le triangle est rectangle et que je connais la longueur de deux cotés ?

R3 : L'égalité entre le carré de l'hypoténuse et la somme des carrés des 2 autres cotés.

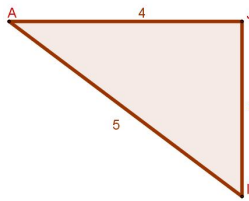
RÉVISION RAPIDE

23

Réciproque de Pythagore :

Énoncé :

Si dans un triangle le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et le plus grand côté est son hypoténuse.



Le plus grand côté du triangle AIJ ci contre est [AI]. Son carré vaut : $5^2 = 25$.

Les deux autres côtés sont [AJ] et [JI]. La somme de leur carré vaut : $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$.

Méthode :

Q1 : A quoi sert cette propriété ?

R1 : A démontrer qu'un triangle est rectangle.

Q2 : Que dois-je déjà avoir ?

R2 : la longueur des 3 côtés d'un triangle.

Q3 : Que puis-je faire une fois que j'ai les longueurs ?

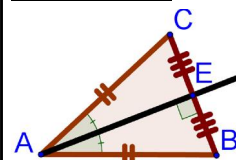
R3 : Je calcule d'une part le carré du plus grand côté et d'autre part la somme des carrés des 2 plus petits côtés ; je fais ensuite une comparaison des deux résultats trouvés. S'ils sont égaux alors le triangle est rectangle. Dans le cas contraire le triangle n'est pas rectangle.

RÉVISION RAPIDE

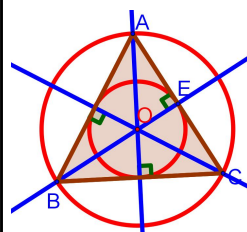
25

Droites dans un triangle particulier

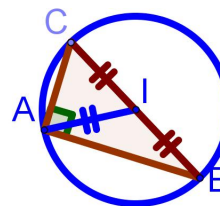
Propriétés :



P1 : Dans un triangle isocèle, les médiane, hauteur, bissectrice et médiatrice issues du sommet principale sont confondues



P2 : Dans un triangle équilatéral, les médianes, hauteurs, bissectrices et médiatrices issues des trois sommets sont confondues : le centre de gravité est donc aussi l'orthocentre et le centre des cercles circonscrits et inscrits.



P3 : Dans un triangle rectangle le centre du cercle circonscrit (intersection des médiatrices) est le milieu de l'hypoténuse

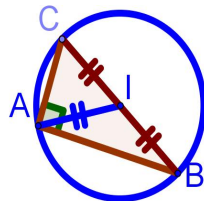
P4 : Dans un triangle rectangle, l'orthocentre est le sommet de l'angle droit

RÉVISION RAPIDE

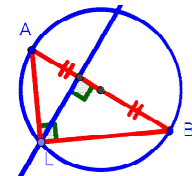
27

Triangle rectangle : Propriétés

P1 : Si un triangle inscrit dans un cercle a pour côté un des diamètres du cercle alors ce triangle est rectangle et ce côté est son hypoténuse.



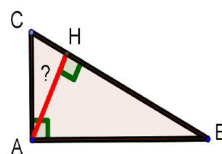
P2 : Dans un triangle rectangle le centre du cercle circonscrit (intersection des médiatrices) est le milieu de l'hypoténuse



P3 : Dans un triangle rectangle, l'orthocentre est le sommet de l'angle droit

P4 : propriété métrique

Dans un triangle rectangle, le produit des deux cotés de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par la longueur de la hauteur issue de l'angle droit :



$$AB \times AC = AH \times BC$$

Remarque :

Cette propriété permet de Calculer la longueur de la hauteur perpendiculaire au support de l'hypoténuse .

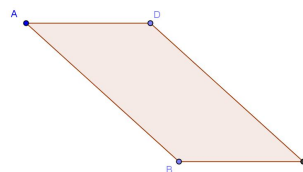
RÉVISION RAPIDE

29

Quadrilatères : Les parallélogrammes

Définition :

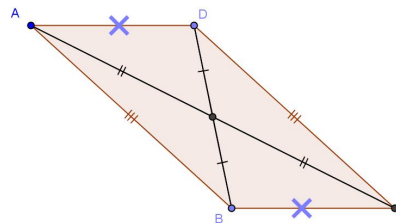
P1 : Un parallélogramme est un quadrilatère dont les cotés opposés sont 2 à 2 égaux et parallèles.



Propriétés & autres définitions:

Un parallélogramme est un quadrilatère dont :

- Les cotés opposés sont de même longueur
- Les diagonales se coupent en leur milieu.



$$(AB) \parallel (CD)$$

$$(AD) \parallel (BC)$$

$$\text{et } AB=CD$$

$$AD=BC$$

N.B : Une seule de ces 2 propriétés suffit pour prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme

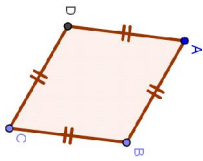
RÉVISION RAPIDE

31

Quadrilatères : Les losanges

Définition :

Un losange est un quadrilatère dont les 4 cotés ont la même mesure et ont des supports parallèles 2 à 2



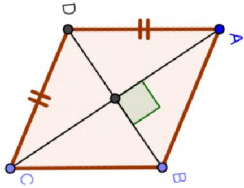
$(AD) \parallel (BC)$ $(AB) \parallel (DC)$
et
 $AB = BC = CD = DA$

Propriétés & autres définitions :

P1 : Un quadrilatère qui a 3 cotés de même longueur est un losange.

P2 : Un parallélogramme dont 2 cotés consécutifs sont de même longueur est un losange.

P3 : Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange



Méthode :

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un losange, on peut soit faire une démonstration directe avec P1, soit prouver d'abord que cette figure est un parallélogramme puis compléter avec P2 ou P3.

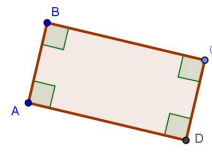
RÉVISION RAPIDE

33

Quadrilatères : Les rectangles

Définition :

Un rectangle est un quadrilatère dont les angles aux 4 sommets sont droits.



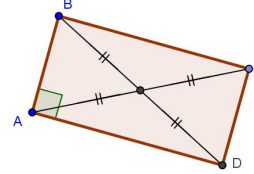
$mes\hat{A} = mes\hat{B} = mes\hat{C} = mes\hat{D} = 90^\circ$
 $(BC) \parallel (AD)$ et $(AB) \parallel (DC)$

Propriétés & autres définitions:

P1 : Un quadrilatère qui a 3 angles droits est un rectangle.

P2 : Un parallélogramme dont 2 cotés consécutifs sont perpendiculaires est un rectangle.

P3 : Un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle



Méthode :

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle, on peut :

- soit faire une démonstration directe avec P1,
- soit prouver d'abord que ce quadrilatère est un parallélogramme puis compléter avec l'une des propriétés P2 ou P3.

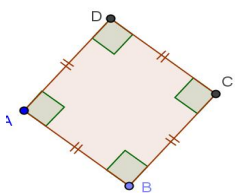
RÉVISION RAPIDE

35

Quadrilatères : Les carrés

Définition :

Un carré est un quadrilatère dont les 4 cotés ont même longueur et dont les angles aux 4 sommets sont droits.



$AB = BC = CD = DA$
Et

$mes\hat{A} = mes\hat{B} = mes\hat{C} = mes\hat{D} = 90^\circ$

Propriétés & autres définitions:

P1 : Un carré est un quadrilatère qui est à la fois rectangle et losange.

P2 : Dans un carré les diagonales se coupent en leur milieu, sont perpendiculaires et ont même longueur

P3 : Dans un carré, les cotés consécutifs sont perpendiculaires, et de même longueurs.

Méthode :

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un carré, on peut d'abord démontrer que ce quadrilatère est un losange puis démontrer que ce quadrilatère est aussi un rectangle.

RÉVISION RAPIDE

37